

Aspectos de sincronización en frecuencia para sistemas de comunicaciones multiportadora

Defensa de tesis doctoral

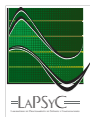
Gustavo José González

Director: Juan Cousseau

Dpto. de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras – Universidad Nacional del Sur

Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica (IIIE) – CONICET

Laboratorio de Procesamiento de Señales y Comunicaciones (LaPSyC)



16 de Marzo de 2012

Tabla de Contenidos

- 1 Motivación
- 2 Esquemas de modulación multiportadora
 - Modulaciones
- 3 Desplazamiento de frecuencia de portadora (CFO)
 - Estimación de CFO en sistemas OFDM
 - Estimación de CFO utilizando filtrado notch
 - Compensación de CFO en sistemas multiusuario
- 4 Nuevos paradigmas en sistemas de comunicaciones
 - Sistemas de radio cognitiva
 - Sistemas híbridos
- 5 Resumen y conclusiones
 - Contribuciones principales y complementarias

Objetivos

- Tratamiento formal de problemáticas reales.
- Baja complejidad de implementación → Aproximaciones.

Problemáticas de los sistemas de comunicaciones modernos

- Canal de comunicaciones (inalámbrico).
- La escasez espectral.

Multiplexado por división en frecuencias ortogonales (OFDM)

- Ecuación de canal sencilla.
- Alta eficiencia espectral.
- Problemas de sincronismo frecuencia → Interferencia inter-portadora.
- Alto PAPR → Alto consumo.

Objetivos

- Tratamiento formal de problemáticas reales.
- Baja complejidad de implementación → Aproximaciones.

Problemáticas de los sistemas de comunicaciones modernos

- Canal de comunicaciones (inalámbrico).
- La escasez espectral.

Multiplexado por división en frecuencias ortogonales (OFDM)

- Ecuación de canal sencilla.
- Alta eficiencia espectral.
- Problemas de sincronismo frecuencia → Interferencia inter-portadora.
- Alto PAPR → Alto consumo.

Objetivos

- Tratamiento formal de problemáticas reales.
- Baja complejidad de implementación → Aproximaciones.

Problemáticas de los sistemas de comunicaciones modernos

- Canal de comunicaciones (inalámbrico).
- La escasez espectral.

Multiplexado por división en frecuencias ortogonales (OFDM)

- Ecuación de canal sencilla.
- Alta eficiencia espectral.
- Problemas de sincronismo frecuencia → Interferencia inter-portadora.
- Alto PAPR → Alto consumo.

Modulaciones mutiusuario

Acceso múltiple por división en frecuencias ortogonales (OFDMA)

- Basado en OFDM se obtiene OFDMA.
- Fácil EQ y baja MAI.
- Se heredan los problemas de sincronismo.
- Compensación compleja (re-ortogonalización).

Modulación multiportadora basada en banco de filtros (FBMC)

FBMC es una generalización de OFDMA

- Disminuye problemas de sincronismo.
- Aumenta complejidad.

Modulaciones mutiusuario

Acceso múltiple por división en frecuencias ortogonales (OFDMA)

- Basado en OFDM se obtiene OFDMA.
- Fácil EQ y baja MAI.
- Se heredan los problemas de sincronismo.
- Compensación compleja (re-ortogonalización).

Modulación multiportadora basada en banco de filtros (FBMC)

FBMC es una generalización de OFDMA

- Disminuye problemas de sincronismo.
- Aumenta complejidad.

Nuevos Sistemas

Ineficiencia en transmisión

- Sistemas híbridos emplean OFDM en el DL (fácil EQ en el móvil) y SC (bajo PAPR) en el UL.
- **Ecuación en la BS.**

Escasez espectral

- Asignación rígida de bandas → bandas sobrecargadas y libres.
- Redes de radios cognitivas CR → asignación dinámica.
- **Requieren sensado espectral y diferenciación de señales.**

Nuevos Sistemas

Ineficiencia en transmisión

- Sistemas híbridos emplean OFDM en el DL (fácil EQ en el móvil) y SC (bajo PAPR) en el UL.
- **Ecuación en la BS.**

Escasez espectral

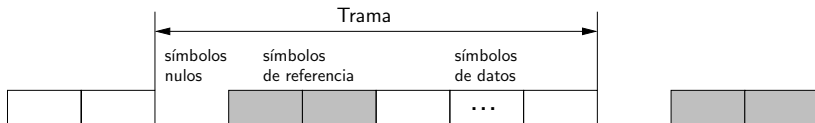
- Asignación rígida de bandas → bandas sobrecargadas y libres.
- Redes de radios cognitivas CR → asignación dinámica.
- **Requieren sensado espectral y diferenciación de señales.**

Tabla de contenidos

- 1 Motivación
- 2 Esquemas de modulación multiportadora
 - Modulaciones
- 3 Desplazamiento de frecuencia de portadora (CFO)
 - Estimación de CFO en sistemas OFDM
 - Estimación de CFO utilizando filtrado notch
 - Compensación de CFO en sistemas multiusuario
- 4 Nuevos paradigmas en sistemas de comunicaciones
 - Sistemas de radio cognitiva
 - Sistemas híbridos
- 5 Resumen y conclusiones
 - Contribuciones principales y complementarias

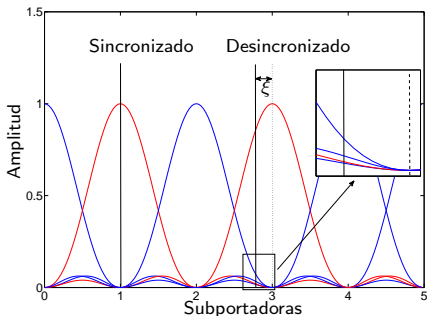
Consideraciones del sistema de comunicaciones

- Sistema centralizado → BS controla el flujo de información.
- Transmisión en tramas formadas por bloques (símbolo multiportadora).
- Canal estático durante la duración de un bloque.



Modulación OFDM

- El flujo de datos se transmite sobre *subportadoras* ortogonales.
- Canal plano sobre cada subportadora → EQ trivial.
- **Problemas de sincronismo en frecuencia (CFO)**



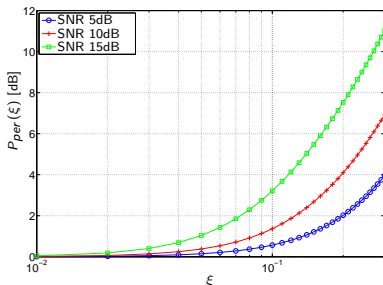
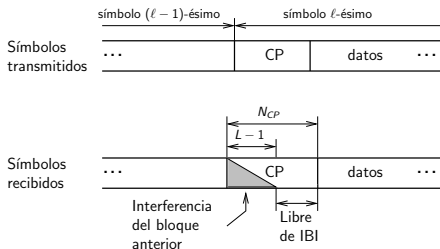
Sincronismo en OFDM

Sincronismo temporal

- Comienzo en *libre IBI* \rightarrow fácil compensación.
- Si hay IBI \rightarrow corrección de temporizado.

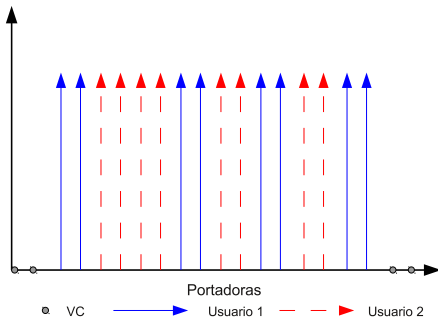
Sincronismo frecuencial

- Destruye ortogonalidad \rightarrow Estimación y compensación.
- WiMAX: variación de 0.1ppm en el LO \rightarrow CFO 4-5 %.



Modulación OFDMA

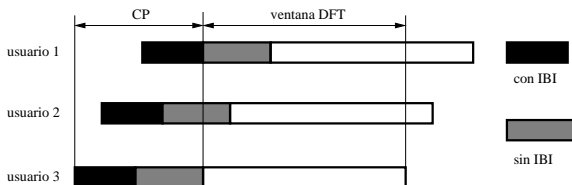
- Modulación multiusuario basada en OFDM.
- Las subportadoras se dividen entre los usuarios.
- Los esquemas de asignación son SCAS, ICAS y GCAS.
- Errores de sincronismo en frecuencia → MAI.



CAS generalizada con $N = 20$, $N_a = 16$, $K = 2$ y $N_t = 2$.

Sincronismo en OFDMA. Compensación

- El enlace de subida es un problema multiparamétrico → alta complejidad.
- En estimación se utilizan métodos de subespacios, máxima verosimilitud o aproximaciones como EM.
- **La compensación no es trivial, se utiliza cancelamiento sucesivo o detección lineal.**



Modulación FBMC

- Generalización de OFDMA \rightarrow Filtro reemplaza ventana rectangular.
- Filtros altamente selectivos en frecuencia \rightarrow Reduce MAI.
- Sólo SCAS.
- Aumenta la complejidad del sistema (modulación/EQ/Sincronismo).

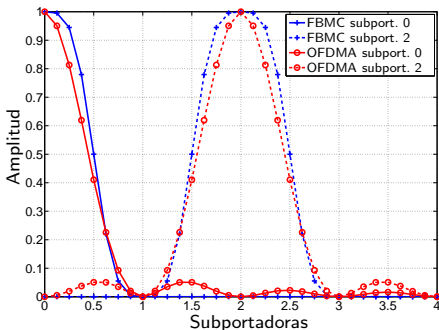
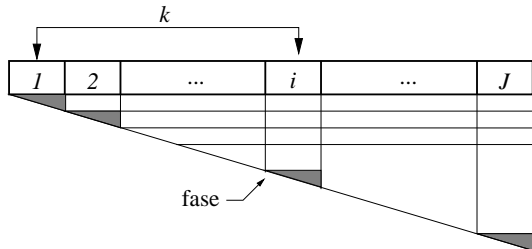


Tabla de contenidos

- 1 Motivación
- 2 Esquemas de modulación multiportadora
 - Modulaciones
- 3 Desplazamiento de frecuencia de portadora (CFO)
 - Estimación de CFO en sistemas OFDM
 - Estimación de CFO utilizando filtrado notch
 - Compensación de CFO en sistemas multiusuario
- 4 Nuevos paradigmas en sistemas de comunicaciones
 - Sistemas de radio cognitiva
 - Sistemas híbridos
- 5 Resumen y conclusiones
 - Contribuciones principales y complementarias

Contexto de estimación de CFO para sistemas OFDM

- Estimación gruesa (inicial) de CFO.
- Secuencia de entrenamiento periódica → baja complejidad.
- Sin errores de temporizado.
- Canal no conocido → no se conocen los símbolos recibidos.
- CFO → desplazamiento en la fase de la AC → **estimación!**.



Modelo TS recibida.

- $J - 1$ términos de la AC.
- diferente rango → **Ambigüedad.**

Estado de la cuestión (Algoritmos subóptimos)

Característica	Algoritmo de Morelli	Algoritmo de Minn
Ambigüedad	Diferencias de fase	Estimación gruesa → compensación
Estimación	BLUE combina $J/2$ diferencias de fase	BLUE combina las $J - 1$ fases residuales.
Desventaja	No se utilizan las $J - 1$ fases disponibles	No es robusto para bajas SNRs

Conclusiones

- Utilización de toda la información disponible → Inclusión de términos de ruido de alto orden.
- El uso de toda la información **no** está relacionado con la metodología.

Estado de la cuestión (Algoritmos subóptimos)

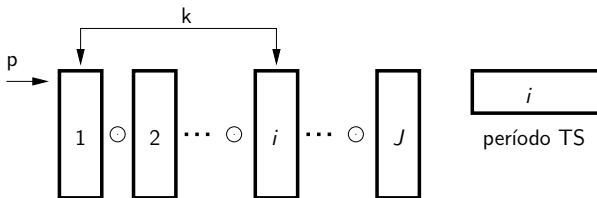
Característica	Algoritmo de Morelli	Algoritmo de Minn
Ambigüedad	Diferencias de fase	Estimación gruesa → compensación
Estimación	BLUE combina $J/2$ diferencias de fase	BLUE combina las $J - 1$ fases residuales.
Desventaja	No se utilizan las $J - 1$ fases disponibles	No es robusto para bajas SNRs

Conclusiones

- Utilización de toda la información disponible → Inclusión de términos de ruido de alto orden.
- El uso de toda la información **no** está relacionado con la metodología.

Función de autocorrelación cíclica promediada

- Usando propiedades cicloestacionarias se define la *autocorrelación cíclica promediada (ACA)*.
- Es una generalización de la función de autocorrelación clásica (grado de libertad adicional).
- Se consideran los términos de ruido de alto orden → **toda la información**.
- Se obtiene el estimador ML basado en la ACA y también estimadores subóptimos



Estimadores basados en la ACA

Estimador basado en sumas (SBE)

- Generalización de Morelli (ACA reduce a AC).
- Incluye ruido alto orden → Toda la información.
- Mejor desempeño que Morelli.

Estimadores de combinación directa (DCE)

- Utiliza fase de la ACA.
- Aprovecha grado de libertad adicional.
- BLUE en dos instancias → DCE-A y DCE-B.
- Buen desempeño a SNR y CFO bajos.

Estimadores basados en la ACA

Estimador basado en sumas (SBE)

- Generalización de Morelli (ACA reduce a AC).
- Incluye ruido alto orden → Toda la información.
- Mejor desempeño que Morelli.

Estimadores de combinación directa (DCE)

- Utiliza fase de la ACA.
- Aprovecha grado de libertad adicional.
- BLUE en dos instancias → DCE-A y DCE-B.
- Buen desempeño a SNR y CFO bajos.

Complejidad de estimación

Estimador	Complejidad relativa [%]	Comentarios
DCE-B	100	inv. Matriz
DCE-A	52	inv. Matriz
SBE	30	inv. Matriz
Minn	27	inv. Matriz
~DCE-A	25	sin inv. Matriz
~DCE-B	20	sin inv. Matriz
~SBE	18	sin inv. Matriz
Morelli	14	sin inv. Matriz

- SBE, DCE-A y DCE-B requieren inversión de matrices → alta complejidad
- Versiones aproximadas (~SBE y ~DCE) → incremento de MSE.
- ~SBE > MM pero procesa el doble de términos.
- Se obtiene la varianza de estimación.

Desempeño de estimación.

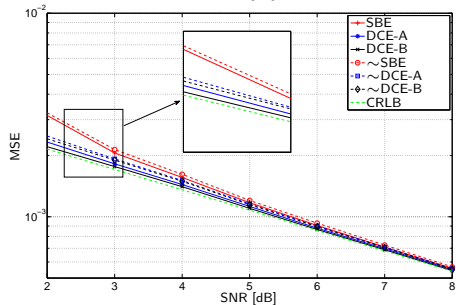
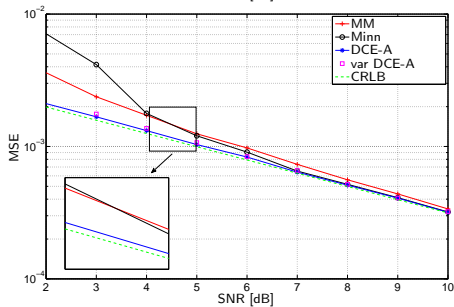
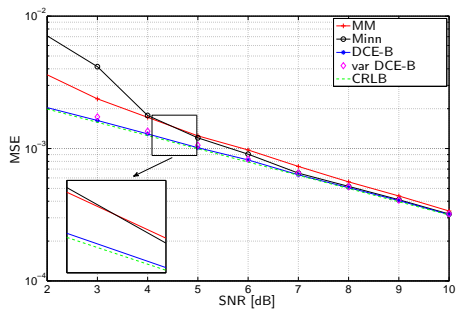
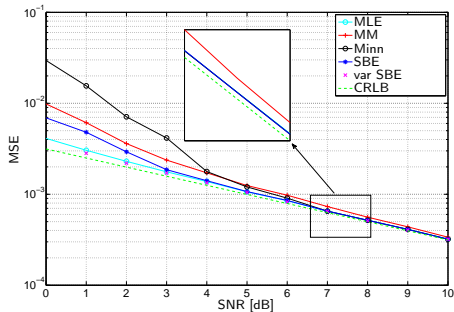


Tabla de contenidos

- 1 Motivación
- 2 Esquemas de modulación multiportadora
 - Modulaciones
- 3 Desplazamiento de frecuencia de portadora (CFO)
 - Estimación de CFO en sistemas OFDM
 - Estimación de CFO utilizando filtrado notch
 - Compensación de CFO en sistemas multiusuario
- 4 Nuevos paradigmas en sistemas de comunicaciones
 - Sistemas de radio cognitiva
 - Sistemas híbridos
- 5 Resumen y conclusiones
 - Contribuciones principales y complementarias

Filtrado notch.

Contexto de estimación de CFO

- La autocorrelación de la TS → Sinusoidal compleja en ruido.
- Amplitud depende del canal → Desconocida!
- Frecuencia depende del CFO → **Estimación.**

Filtro notch

- Puede utilizarse filtrado notch para realizar estimación de CFO.
- Un filtro notch sintonizado a la frecuencia de la sinusoidal minimiza la varianza a la salida.
- **En etapa inicial de investigación.**

Filtrado notch.

Contexto de estimación de CFO

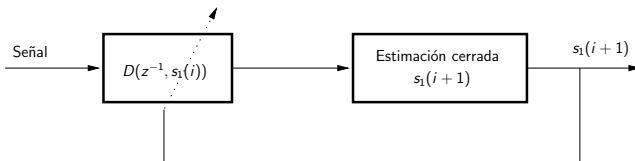
- La autocorrelación de la TS → Sinusoidal compleja en ruido.
- Amplitud depende del canal → Desconocida!
- Frecuencia depende del CFO → **Estimación.**

Filtro notch

- Puede utilizarse filtrado notch para realizar estimación de CFO.
- Un filtro notch sintonizado a la frecuencia de la sinusoidal minimiza la varianza a la salida.
- **En etapa inicial de investigación.**

Filtro notch de realización directa

- Implementación *fuera de línea*.
- IIR → minimización no cuadrática (sin forma cerrada) → Steiglitz-McBride.
- Realización directa → Sesgo → Normalización compleja.
- Parámetros de sintonización y sensibilidad (BW 3 dB) acoplados → Complejidad de derivación.



Algoritmo "Steiglitz-McBride".

Filtro notch realización lattice

- Parámetros de sintonización y sensibilidad (BW 3 dB) **desacoplados**.
- No requiere normalización → Menor complejidad.
- Estimación cerrada aproximada → Baja complejidad.

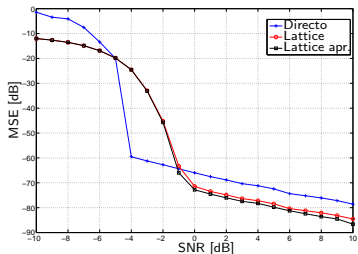
Estimación por filtrado notch. Complejidad

Método	Complejidad relativa [%]	Comentarios
Directo	100	iterativo
Lattice	36	iterativo
Lattice aprox.	29	iterativo
RPHD	5	No iterativo

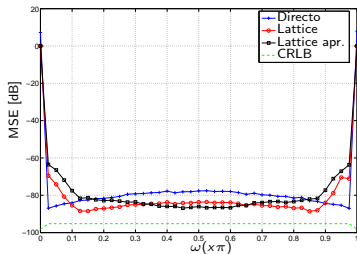
Análisis de convergencia

- Suponiendo $N \rightarrow \infty$ se demuestra que $MSE(s_1(i)) > MSE(s_1(i + 1))$.
- Se encuentra una cota inferior para el $MSE(i)$.

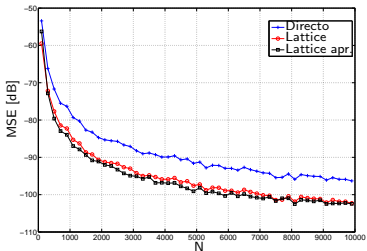
Resultados de estimación de frecuencia



MSE vs SNR para $N = 1000$ y $\omega = 0,4\pi$.



MSE vs. ω para SNR=10 dB y $N = 1000$



MSE vs. N para SNR=10 dB y $\omega = 0,4\pi$.

- Mejor desempeño en rango medio de ω .
- Menor complejidad.

Tabla de contenidos

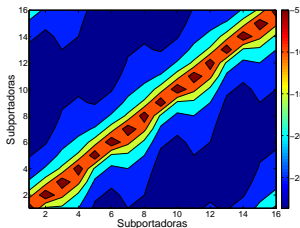
- 1 Motivación
- 2 Esquemas de modulación multiportadora
 - Modulaciones
- 3 Desplazamiento de frecuencia de portadora (CFO)
 - Estimación de CFO en sistemas OFDM
 - Estimación de CFO utilizando filtrado notch
 - **Compensación de CFO en sistemas multiusuario**
- 4 Nuevos paradigmas en sistemas de comunicaciones
 - Sistemas de radio cognitiva
 - Sistemas híbridos
- 5 Resumen y conclusiones
 - Contribuciones principales y complementarias

Compensación de CFO en sistemas OFDMA

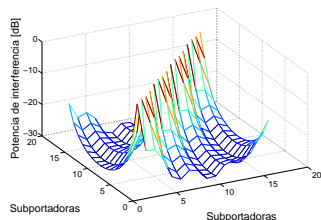
- Detección lineal es más compleja pero de mejor desempeño.
- La MAI se puede describir utilizando una matriz con las dimensiones del sistema.
- La compensación requiere la inversión de la matriz \rightarrow alta complejidad.
- La *aproximación de bandas* reduce complejidad (BC) \rightarrow interferencia residual.

Matriz de compensación

- Diferentes CFOs en cada usuario \rightarrow Discontinuidades en las columnas de la matriz interferencia (Π).
- Desplazamientos circulares relacionan las columnas de cada usuario.
- Concentración de energía en $|q - p|$ cercano a 0 ó a N .



(a) contorno

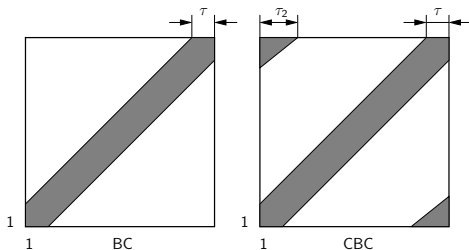


(b) superficie

Matriz interferencia con $N = 16$, $K = 2$, $N_t = 2$, $\xi^{(1)} = 0,2$, $\xi^{(2)} = -0,3$ y CAS intercalado.

Aproximación de bandas circulante

- Se propone una matriz de *compensación de banda circulante* (CBC).
- Se derivan algoritmos (LU, FS y BS) para invertir matrices de banda circulante.
- En ciertas condiciones CBC se reduce a BC.
- Si BC no considera términos importantes \rightarrow Pérdida de desempeño.



Estructuras de las matrices BC y CBC.

Compensación de CFO en sistemas FBMC

- Filtros con bajos lóbulos → Baja MAI.
- Los usuarios no se interfieren → Compensar solo auto-interferencia.
- **Se obtiene una compensación para la implementación PHYDYAS.**

Complejidad de compensación

Complejidad OFDM vs FBMC

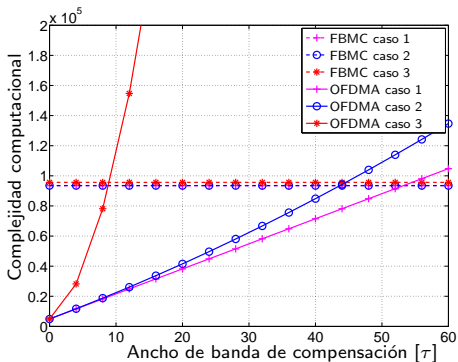
- La complejidad del transmisor OFDMA es un tercio la de FBMC.

Complejidad del receptor.

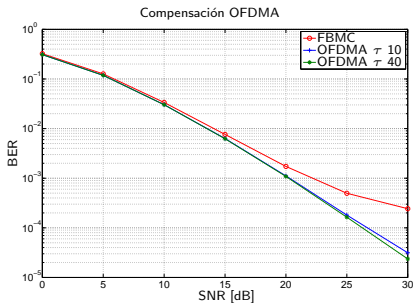
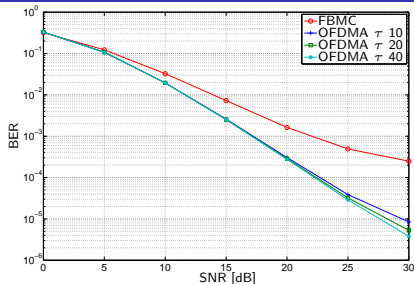
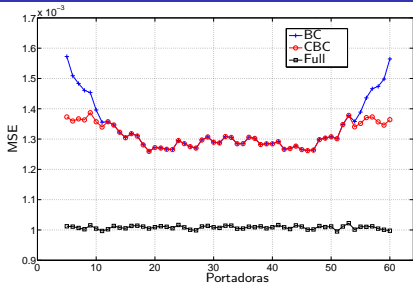
Esquema	Demod. [%]	comp. CFO [%]	act. CFO [%]	EQ. [%]
FBMC	25,4	21	4	1
OFDMA	2	12,5	100	0,5

Efectos de la tasa de actualización del CFO

- Caso 1 *CFO invariante en el tiempo.* No es necesaria la actualización.
- Caso 2 *CFO lentamente variante en el tiempo.* Actualizado cada N_u símbolos. ($N_u = 100$)
- Caso 3 *CFO altamente variante en el tiempo.* Actualizado cada símbolo.

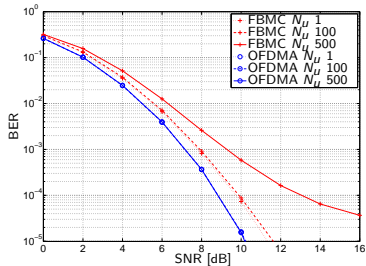


Desempeño compensación OFDMA / OFDMA vs. FBMC



OFDMA vs FBMC. Vehicular A

FBMC-SCAS vs OFDMA-ICAS.



Actualización CFO. Canal altamente variante.

Tabla de contenidos

- 1 Motivación
- 2 Esquemas de modulación multiportadora
 - Modulaciones
- 3 Desplazamiento de frecuencia de portadora (CFO)
 - Estimación de CFO en sistemas OFDM
 - Estimación de CFO utilizando filtrado notch
 - Compensación de CFO en sistemas multiusuario
- 4 Nuevos paradigmas en sistemas de comunicaciones
 - **Sistemas de radio cognitiva**
 - Sistemas híbridos
- 5 Resumen y conclusiones
 - Contribuciones principales y complementarias

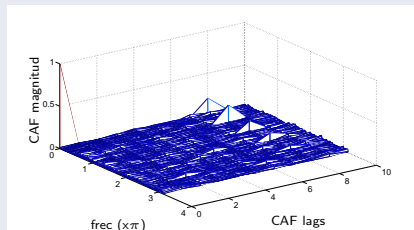
Detectores de cicloestacionaridad

Procedimiento:

- Se calcula la función de autocorrelación cíclica.
- Se obtiene una función costo (\sum de $|\cdot|^2$).
- Se compara contra un umbral.

Inducida por CP

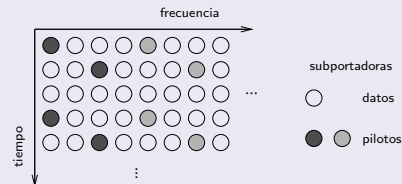
Sólo detección



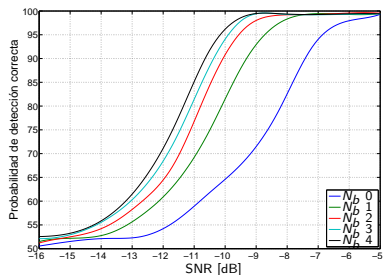
Inducida por Pilotos

Detección y diferenciación.

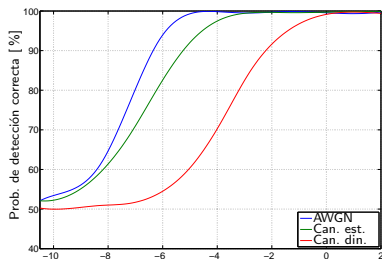
Se propone estadística de \mathcal{H}_0 .



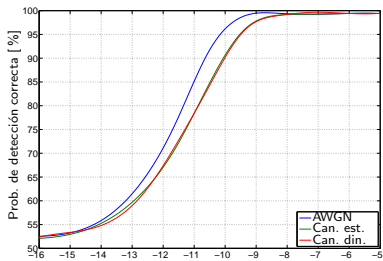
Desempeño detección y diferenciación



Detección de señales usando CP - canal AWGN.



Detección de señales usando Pil - dif. canales.



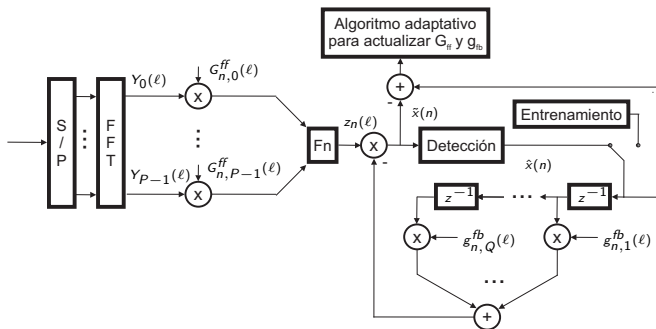
Detección de señales usando CP - dif. canales.

- Sin conocimiento del canal.
- Problemas de sincronizado.
- CR en estado de desarrollo.

Tabla de contenidos

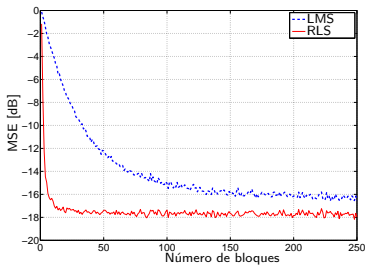
- 1 Motivación
- 2 Esquemas de modulación multiportadora
 - Modulaciones
- 3 Desplazamiento de frecuencia de portadora (CFO)
 - Estimación de CFO en sistemas OFDM
 - Estimación de CFO utilizando filtrado notch
 - Compensación de CFO en sistemas multiusuario
- 4 Nuevos paradigmas en sistemas de comunicaciones
 - Sistemas de radio cognitiva
 - **Sistemas híbridos**
- 5 Resumen y conclusiones
 - Contribuciones principales y complementarias

Ecuación DFE para SC

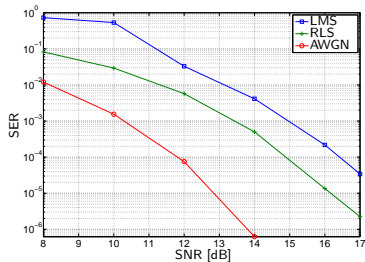


- Para el UL se utiliza una señal SC con extensión cíclica.
- La PN se alimenta en el filtro de realimentación
- FF funciona en frecuencia y FB en tiempo.
- **El algoritmo de adaptación es RLS.**

Desempeño de DFE



Curvas de aprendizaje para LMS y RLS.



SER para adaptación LMS y RLS.

- Importante ganancia en la velocidad de convergencia.
- La capacidad de seguimiento del canal no es buena.
- Es necesario incluir más información del canal.

Tabla de contenidos

- 1 Motivación
- 2 Esquemas de modulación multiportadora
 - Modulaciones
- 3 Desplazamiento de frecuencia de portadora (CFO)
 - Estimación de CFO en sistemas OFDM
 - Estimación de CFO utilizando filtrado notch
 - Compensación de CFO en sistemas multiusuario
- 4 Nuevos paradigmas en sistemas de comunicaciones
 - Sistemas de radio cognitiva
 - Sistemas híbridos
- 5 Resumen y conclusiones
 - Contribuciones principales y complementarias

Estimación y compensación de CFO

- Estimación de CFO en OFDM.
 - Se propuso una nueva familia de estimadores (SBE y DCE).
 - Utilizan toda la información y son más robustos.
- Estimación de frecuencia (CFO) por filtrado notch.
 - Realización lattice *fuera de línea*.
 - Mejor desempeño y menor complejidad.
- Compensación de CFO en sistemas multiusuario
 - Compensación basada en matrices por bandas circulantes.
 - Exhaustiva comparación entre OFDMA y FBMC.

Nuevos paradigmas en sistemas de comunicaciones

- Sistemas de radio cognitiva.
 - Técnicas (cicloestacionarias) de detección y diferenciación de señales.
 - Simplificación en la estadística de la diferenciación
- Sistemas Híbridos.
 - Estudio de ecualizadores para señales SC-CE.
 - Se propone una adaptación RLS para un filtro DCE en bloques.

Muchas gracias por su atención

¿Preguntas?

Algoritmo de Morelli

Sea una TS $\{x(n), -N_{cp} \leq n \leq N - 1\}$ de período M y largo $N + N_{cp}$, donde $N = MJ$. La señal recibida sin CP, resulta

$$r(n) = e^{j\frac{2\pi\xi}{N}n} q(n) + w(n), \text{ para } n = 0, \dots, N - 1, \quad (1)$$

donde $q(n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)x(n-k)$ (mismo período) y ξ el CFO. Un período de $q(n)$ es $s(p) = q(p)$ para $0 \leq p \leq M - 1$. Definamos la función autocorrelación

$$\hat{\Gamma}(k) = \frac{1}{N - kM} \sum_{n=kM}^{N-1} r(n)r^*(n - kM), \quad 0 \leq k \leq A - 1. \quad (2)$$

Reemplazando (1) en la Ec. (2), resulta:

$$\hat{\Gamma}(k) = e^{j\frac{2\pi\xi k}{J}} (D + E(k) + F(k)), \quad 0 \leq k \leq A - 1 \quad (3)$$

donde $\tilde{w}(n) = e^{j\frac{2\pi\xi k}{J}} w(n)$ (equivalente a $w(n)$) y

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{N - kM} \sum_{n=kM}^{N-1} |q(n)|^2 = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |s(n)|^2, \\ E(k) &= \frac{1}{N - kM} \sum_{n=kM}^{N-1} q(n)\tilde{w}^*(n - kM)q^*(n - kM)\tilde{w}(n), \\ F(k) &= \frac{1}{N - kM} \sum_{n=kM}^{N-1} \tilde{w}(n)\tilde{w}^*(n - kM), \end{aligned} \quad (4)$$

Es fácil notar que la información de CFO está dividida en A componentes de $\hat{\Gamma}(k)$. Definiendo

$$\theta(k) = \arg\{\hat{\Gamma}(k)\} = \frac{2\pi\xi k}{J} + \arg\{\chi(k)\}, \quad 0 \leq k \leq J-1, \quad (5)$$

donde $\chi(k) = D + E(k) + F(k)$, se puede estimar el CFO (notando que el rango es $|\xi| < J/(2k)$). Para evitar la reducción de rango, Morelli basa su estimación en la diferencia de fases de $\hat{\Gamma}(k)$:

$$\theta_d(k) = [\theta(k) - \theta(k-1)]_{2\pi} = \left[\frac{2\pi\xi}{J} + \gamma(k) \right]_{2\pi}, \quad 1 \leq k \leq A, \quad (6)$$

donde $\gamma(k) = \arg\{\chi(k)\} - \arg\{\chi(k-1)\}$, $1 \leq A \leq J-1$. Ahora el rango de la estimación es $|\xi| < J/2$.

Finalmente, definiendo $\boldsymbol{\theta}_d = [\theta_d(1), \dots, \theta_d(A)]^T$ y suponiendo una alta SNR, el BLUE resulta:

$$\hat{\xi}_M = \frac{J}{2\pi} \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{C}_\theta^{-1} \boldsymbol{\theta}_d}{\mathbf{1}^T \mathbf{C}_\theta^{-1} \mathbf{1}}, \quad (7)$$

donde \mathbf{C}_θ es la matriz de covarianza de $\boldsymbol{\theta}_d$.

En la derivación de \mathbf{C}_θ se desprecian los términos de ruido de alto orden ($F(k)$ definido en la Ec. (4)) \rightarrow la matriz resulta singular para $k > J/2$ y el mejor desempeño se obtiene para $A = J/2$.

Matriz de covarianza de la ACA

Sea una TS $\{x(n), -N_{cp} \leq n \leq N - 1\}$ de período M y largo $N + N_{cp}$, donde $N = MJ$. La señal recibida sin CP, resulta

$$r(n) = e^{j\frac{2\pi\xi}{N}n}q(n) + w(n), \text{ para } n = 0, \dots, N - 1, \quad (8)$$

donde $q(n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)x(n - k)$ (mismo período) y ξ el CFO. Un período de $q(n)$ es $s(p) = q(p)$ para $0 \leq p \leq M - 1$.

La ACA se define como

$$\hat{\Gamma}_c(p, k) = \frac{1}{J - k} \sum_{n=0}^{J-k-1} r(nM + p)r^*((n + k)M + p). \quad (9)$$

Reemplazando (8) en (9) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_c(p, k) &= \frac{1}{J - k} \sum_{u=0}^{J-k-1} e^{j\frac{2\pi\xi kM}{N}} |s(p)|^2 + e^{j\frac{2\pi\xi(p+uM)}{N}} s(p)w^*(p + (u + k)M) \\ &\quad + e^{-j\frac{2\pi\xi(p+(u+k)M)}{N}} s^*(p)w(p + uM) + w(p + uM)w^*(p + (u + k)M) \end{aligned} \quad (10)$$

Se considera el término de ruido de alto orden. Como (10) es no Gaussiana \rightarrow *teorema de límite central*, resultando:

$$\hat{\Gamma}_c(p, k) \approx e^{-j\frac{2\pi\xi k}{J}} |s(p)|^2 + w_c(p, k) \quad (11)$$

donde:

$$\mu_c(p, k) = \mathbb{E}\{\hat{\Gamma}_c(p, k)\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{J-k} \sum_{u=0}^{J-k-1} r(uM+p)r^*((u+k)M+p)\right\} = e^{-j\frac{2\pi\epsilon T}{N}} |s(p)|^2$$

y $w_c(p, k)$ es una variable aleatoria Gaussiana de media cero.

La ACA no es circularmente simétrica \rightarrow componentes real e imaginaria por separado.

Comenzando para el caso de p fijo y $1 \leq k \leq J-1$, es útil definir los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k(p) &= [\mathbf{r}_k^{(R)T}(p) \mathbf{r}_k^{(I)T}(p)]^T, & (12) \\ \mathbf{r}_k^{(R)}(p) &= [\text{Re}\{\hat{\Gamma}_c(p, 1)\} \dots \text{Re}\{\hat{\Gamma}_c(p, J-1)\}]^T, \\ \mathbf{r}_k^{(I)}(p) &= [\text{Im}\{\hat{\Gamma}_c(p, 1)\} \dots \text{Im}\{\hat{\Gamma}_c(p, J-1)\}]^T, \\ \boldsymbol{\mu}_k(p) &= [\boldsymbol{\mu}_k^{(R)T}(p) \boldsymbol{\mu}_k^{(I)T}(p)]^T, & (13) \\ \boldsymbol{\mu}_k^{(R)}(p) &= [\text{Re}\{\mu_c(p, 1)\} \dots \text{Re}\{\mu_c(p, J-1)\}]^T, \\ \boldsymbol{\mu}_k^{(I)}(p) &= [\text{Im}\{\mu_c(p, 1)\} \dots \text{Im}\{\mu_c(p, J-1)\}]^T. \end{aligned}$$

Con J grande, $\mathbf{r}_k(p) \rightarrow \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_k(p), \mathbf{C}_k(p))$. La matriz $\mathbf{C}_k(p)$ se separa en cuatro submatrices, como:

$$\mathbf{C}_k(p) = [\boldsymbol{\Sigma}_{RR}(p), \boldsymbol{\Sigma}_{RI}(p); \boldsymbol{\Sigma}_{RI}(p), \boldsymbol{\Sigma}_{II}(p)] \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij}(p) = \mathbb{E}\left\{(\mathbf{r}_k^{(i)}(p) - \boldsymbol{\mu}_k^{(i)}(p))(\mathbf{r}_k^{(j)}(p) - \boldsymbol{\mu}_k^{(j)}(p))^T\right\} \quad (15)$$

para $i, j \in \{R, I\}$.

Las componentes $[\Sigma_{ij}(\rho)]_{k_1, k_2}$ de esas matrices son:

$$[\Sigma_{RR}(\rho)]_{k_1, k_2} = \frac{1}{(J - k_1)(J - k_2)} \begin{cases} (J - k_1)(\sigma^2 |s(\rho)|^2 + \sigma^4/2) & \text{si } k_1 = k_2 \text{ y } k_1 < J/2 \\ \quad + (J - 2k_1)\sigma^2 |s(\rho)|^2 \cos(4\pi\xi k_1/J) & \\ (J - k_1)(\sigma^2 |s(\rho)|^2 + \sigma^4/2) & \text{si } k_1 = k_2 \text{ y } k_1 \geq J/2 \\ \min(J - k_1, J - k_2)(\sigma^2 |s(\rho)|^2 \cos(2\pi\xi(k_2 - k_1)/J) + \sigma^4/2) & \text{si } k_1 \neq k_2 \text{ y } k_1 + k_2 < J \\ \quad + (J - k_1 - k_2)\sigma^2 |s(\rho)|^2 \cos(2\pi\xi(k_1 + k_2)/J) & \\ \min(J - k_1, J - k_2)(\sigma^2 |s(\rho)|^2 \cos(2\pi\xi(k_2 - k_1)/J) + \sigma^4/2) & \text{si } k_1 \neq k_2 \text{ y } k_1 + k_2 \geq J, \end{cases} \quad (16)$$

$$[\Sigma_{RI}(\rho)]_{k_1, k_2} = \frac{1}{(J - k_1)(J - k_2)} \begin{cases} \min(J - k_1, J - k_2)\sigma^2 |s(\rho)|^2 \sin(2\pi\xi(k_1 - k_2)/J) & \text{si } k_1 + k_2 < J \\ \quad - (J - k_1 - k_2)\sigma^2 |s(\rho)|^2 \sin(2\pi\xi(k_1 + k_2)/J) & \\ \min(J - k_1, J - k_2)\sigma^2 |s(\rho)|^2 \sin(2\pi\xi(k_1 - k_2)) & \text{si } k_1 + k_2 \geq J, \end{cases} \quad (17)$$

$$[\Sigma_{II}(\rho)]_{k_1, k_2} = \frac{1}{(J - k_1)(J - k_2)} \begin{cases} (J - k_1)(\sigma^2 |s(\rho)|^2 + \sigma^4/2) & \text{si } k_1 = k_2 \text{ y } k_1 < J/2 \\ \quad - (J - 2k_1)\sigma^2 |s(\rho)|^2 \cos(4\pi\xi k_1/J) & \\ (J - k_1)(\sigma^2 |s(\rho)|^2 + \sigma^4/2) & \text{si } k_1 = k_2 \text{ y } k_1 \geq J/2, \\ \min(J - k_1, J - k_2)(\sigma^2 |s(\rho)|^2 \cos(2\pi\xi(k_2 - k_1)/J) + \sigma^4/2) & \text{si } k_1 \neq k_2 \text{ y } k_1 + k_2 < J \\ \quad - (J - k_1 - k_2)\sigma^2 |s(\rho)|^2 \cos(2\pi\xi(k_1 + k_2)/J) & \\ \min(J - k_1, J - k_2)(\sigma^2 |s(\rho)|^2 \cos(2\pi\xi(k_2 - k_1)/J) + \sigma^4/2) & \text{si } k_1 \neq k_2 \text{ y } k_1 + k_2 \geq J, \end{cases} \quad (18)$$

y $\Sigma_{IR}(\rho) = \Sigma_{RI}(\rho)^T$.

Consideremos ahora el caso de k fijo y $0 \leq p \leq M$. Los vectores resultan:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_p(k) &= [\mathbf{r}_p^{(R)T}(k) \mathbf{r}_p^{(I)T}(k)]^T, & (19) \\ \mathbf{r}_p^{(R)}(k) &= [\text{Re}\{\hat{\Gamma}_c(0, k)\} \dots \text{Re}\{\hat{\Gamma}_c(M - 1, k)\}]^T, \\ \mathbf{r}_p^{(I)}(k) &= [\text{Im}\{\hat{\Gamma}_c(0, k)\} \dots \text{Im}\{\hat{\Gamma}_c(M - 1, k)\}]^T, \\ \boldsymbol{\mu}_p(k) &= [\boldsymbol{\mu}_p^{(R)T}(k) \boldsymbol{\mu}_p^{(I)T}(k)]^T, & (20) \\ \boldsymbol{\mu}_p^{(R)}(k) &= [\text{Re}\{\mu_c(0, k)\} \dots \text{Re}\{\mu_c(M - 1, k)\}]^T, \\ \boldsymbol{\mu}_p^{(I)}(k) &= [\text{Im}\{\mu_c(0, k)\} \dots \text{Im}\{\mu_c(M - 1, k)\}]^T. \end{aligned}$$

Suponiendo J grande $\mathbf{r}_p(k) \rightarrow \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_p(k), \mathbf{C}_p(k))$. La matriz de covarianza se divide en cuatro submatrices:

$$\mathbf{C}_p(k) = [\boldsymbol{\Delta}_{RR}(k), \boldsymbol{\Delta}_{RI}(k); \boldsymbol{\Delta}_{RI}(k), \boldsymbol{\Delta}_{II}(k)] \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{ij}(k) = \text{E} \left\{ (\mathbf{r}_p^{(i)}(k) - \boldsymbol{\mu}_p^{(i)}(k))(\mathbf{r}_p^{(j)}(k) - \boldsymbol{\mu}_p^{(j)}(k))^T \right\} \quad (22)$$

Los términos de la ACA no están correlados para diferentes $p \rightarrow$ la matriz de covarianza $\mathbf{C}_p(k)$ pueden obtenerse como

$$[\boldsymbol{\Delta}_{i,j}(k)]_{p_1,p_2} = \begin{cases} [\boldsymbol{\Sigma}_{i,j}(p_1)]_{k,k} & \text{si } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{si } p_1 \neq p_2. \end{cases} \quad (23)$$

Matriz de covarianza para el estimador SBE

El procedimiento para obtener la matriz de covarianza de SBE (Ξ_d) es el siguiente:

- 1 Se obtiene la matriz de covarianza de la suma sobre p de los términos de la ACA:

$$r_s(k) = \sum_{p=0}^{M-1} \hat{r}_c(p, k) = e^{\frac{-j2\pi\epsilon k}{J}} S + w_s(k) \quad (24)$$

donde $S = \sum_{p=0}^{M-1} |s(p)|^2$ y $w_s(k) = \sum_{p=0}^{M-1} w(p, k)$.

- 2 Para alta SNR, $\epsilon(k) = \arg\{r_s(k)\}$ se aproxima por una transformación lineal.
- 3 Usando la propiedad afin se encuentra la matriz de covarianza de Ξ_d .

La ACA no están correlacionada para p diferentes \rightarrow la matriz de covarianza de $r_s(k)$ (\mathbf{S}_k) resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= [\Omega_{RR} \ \Omega_{RI}; \ \Omega_{IR} \ \Omega_{II}], \text{ cuyos componentes son:} \\ [\Omega_{i,j}]_{k_1, k_2} &= \sum_{p=0}^{M-1} [\Sigma_{i,j}(p)]_{k_1, k_2}, \end{aligned} \quad (25)$$

donde $[\Sigma_{i,j}(p)]_{k_1, k_2}$ con $i, j \in \{R, I\}$, viene del apéndice anterior. $w_s(k)$ no es conjugado simétrico.

Considerando un régimen alto de SNR, la fase $r_s(k)$ de puede obtenerse como

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= \arg \left\{ e^{-\frac{j2\pi\xi k}{J}} S + w_s(k) \right\} = \frac{-2\pi\xi k}{J} + \arg \left\{ \frac{\text{Im}\{w_s(k)e^{\frac{j2\pi\xi k}{J}}\}}{S + \text{Re}\{w_s(k)e^{\frac{j2\pi\xi k}{J}}\}} \right\} \\ &\approx \frac{-2\pi\xi k}{J} + \frac{\text{Im}\{w_s(k)e^{\frac{j2\pi\xi k}{J}}\}}{S + \text{Re}\{w_s(k)e^{\frac{j2\pi\xi k}{J}}\}} \approx \frac{-2\pi\xi k}{J} + \frac{\text{Im}\{w_s(k)e^{\frac{j2\pi\xi k}{J}}\}}{S}. \end{aligned} \quad (26)$$

La transformación lineal mostrada en (26) puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k &= \frac{1}{S} \left[\text{diag} \left[\sin \left(\frac{2\pi\xi 1}{J} \right), \dots, \sin \left(\frac{2\pi\xi(J-1)}{J} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \text{diag} \left[\cos \left(\frac{2\pi\xi 1}{J} \right), \dots, \cos \left(\frac{2\pi\xi(J-1)}{J} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Luego la matriz de covarianza para $\epsilon(k)$ tiene la siguiente forma

$$\Xi_k = \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^T, \quad (28)$$

con componentes dados por

$$[\Xi(p)]_{k_1, k_2} = \frac{\sigma^2}{S(J - k_1)(J - k_2)} \begin{cases} (J - k_1)(1 + M\sigma^2/(2S)) - (J - 2k_1) & \text{si } k_1 = k_2 \text{ y } k_1 < J/2 \\ (J - k_1)(1 + M\sigma^2/(2S)) & \text{si } k_1 = k_2 \text{ y } k_1 \geq J/2 \\ \min(J - k_1, J - k_2) - (J - k_1 - k_2) & \text{si } k_1 \neq k_2 \text{ y } k_1 + k_2 < J \\ \min(J - k_1, J - k_2) & \text{si } k_1 = k_2 \text{ y } k_1 + k_2 \geq J. \end{cases} \quad (29)$$

Es interesante notar que Ξ_k no depende de ξ .

La transformación lineal que permite obtener $\Xi_d(k)$ puede describirse en forma matricial como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Ahora es posible obtener la matriz covarianza de $\epsilon_d(k)$ como

$$\Xi_d = \mathbf{T}\Xi_k\mathbf{T}^T. \quad (31)$$

Sesgo en estimadores basados en la función autocorrelación para baja SNR

La expresión general de la fase está dada por

$$\beta(k) = \arg \left\{ e^{\frac{-j2\pi\xi k}{J}} E(k) + \mathcal{V}(k) \right\} = \frac{-2\pi\xi k}{J} + \arg \left\{ \frac{\text{Im}\{\mathcal{V}(k)e^{\frac{j2\pi\xi k}{J}}\}}{E(k) + \text{Re}\{\mathcal{V}(k)e^{\frac{j2\pi\xi k}{J}}\}} \right\} \quad (32)$$

donde $E(k)$ es término de energía y $\mathcal{V}(k)$ es el término de ruido. Para alta SNR \rightarrow despreciar el término $\mathcal{V}(k)$.

Alternativamente, a continuación se estudia la fase de (32) considerando que

- 1 la SNR $\rightarrow 0$, es decir, $\mathcal{V}(k)$ es dominante sobre el de señal $E(k)$,
- 2 J es suficientemente grande como para considerar que $\mathcal{V}(k)$ es aproximadamente Gaussiano.

El bosquejo de la demostración es el siguiente:

- 1 El argumento del arcotangente en (32) tiene distribución Cauchy.
- 2 El arcotangente de la distribución Cauchy ($\hat{w}_\beta(k)$) tiene media distinta de cero.
- 3 La estimación final de CFO es sesgada.

Entonces, (32) puede escribirse como

$$\beta(k) \approx \frac{-2\pi\xi k}{J} + \arg \left\{ \frac{w_1(k)}{w_2(k)} \right\}. \quad (33)$$

Para el caso del estimador SBE (y el algoritmo de Morelli), las expresiones de $w_1(k)$ y $w_2(k)$ son

$$w_1(k) = \operatorname{Re}\{w_s(k)\} \sin\left(\frac{2\pi\xi k}{J}\right) + \operatorname{Im}\{w_s(k)\} \cos\left(\frac{2\pi\xi k}{J}\right), \quad (34)$$

$$w_2(k) = \operatorname{Re}\{w_s(k)\} \cos\left(\frac{2\pi\xi k}{J}\right) - \operatorname{Im}\{w_s(k)\} \sin\left(\frac{2\pi\xi k}{J}\right). \quad (35)$$

donde $w_s(k) = \sum_{p=0}^{M-1} w(p, k)$. Si $\sigma_1(k)$ y $\sigma_2(k)$ son respectivamente la desviación estándar de $w_1(k)$ y $w_2(k)$, y $\rho(k) = E\{w_1(k)w_2(k)\}/(\sigma_1(k)\sigma_2(k))$ es la correlación normalizada, la variable aleatoria $w_1(k)/w_2(k) \rightarrow \mathbf{C}(\mu_c(k), \gamma_c(k))$, donde \mathbf{C} es la distribución de Cauchy de mediana $\mu_c(k) = \rho(k)\sigma_1(k)/\sigma_2(k)$ y parámetro de escala $\gamma_c(k) = \sigma_1(k)\sqrt{1 - \rho(k)^2}/\sigma_2(k)$.

La pdf de $\hat{w}_\beta(k) = \arg\left\{\frac{w_1(k)}{w_2(k)}\right\}$ es

$$f_w(x) = \frac{\sec(x)^2}{\pi\gamma_c((\tan(x) - \mu_c)^2/\gamma_c^2 + 1)}. \quad (36)$$

La media de $\hat{w}_\beta(k)$ es distinta de cero si $\mu_c(k)$ es distinta de cero $\rightarrow w_1(k)$ y $w_2(k)$ están correladas. La expresión de $\rho(k)$ es

$$\rho(k) = \frac{1}{\sigma_1(k)\sigma_2(k)} \left[\frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi\xi k}{J}\right) ([\mathbf{\Omega}_{RR}]_{k,k} - [\mathbf{\Omega}_{II}]_{k,k}) + \cos\left(\frac{4\pi\xi k}{J}\right) [\mathbf{\Omega}_{RI}]_{k,k} \right] \quad (37)$$

donde $[\mathbf{\Omega}_{i,j}]_{k_1,k_2}$ esta definido en (25). $\rho(k)$ es cero si y solo si ξ es cero $\rightarrow \beta(k)$ es sesgada para bajo régimen de SNR.

Gracias a la similitud entre las formulaciones de las fases la misma conclusión es válida para todos los algoritmos basados en la fase de la función autocorrelación.

Estimación de frecuencia utilizando filtrado notch

La señal de entrada al estimador se define como:

$$r(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi) + w(n), \text{ para } 0 \leq n \leq N - 1, \quad (38)$$

donde $w(n)$ es WGN de varianza σ^2 .

El filtro notch se basa en la realización lattice normalizada:

$$H_L(z^{-1}) = \frac{(s_2 + 1)}{2} \frac{1 + 2s_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + s_1(1 + s_2)z^{-1} + s_2 z^{-2}} \quad (39)$$

donde $s_1 = \sin \theta_1$ y $s_2 = \sin \theta_2$, $\omega = \theta_1 + \pi/2$ y $s_2 = (1 - \tan(B/2))/(1 + \tan(B/2))$, con B es el ancho de banda de 3dB.

La señal de entrada pre-filtrada con el denominador fijo del filtro notch es: $g(n) = D_i(z^{-1})r(n)$, donde

$$D_i(z^{-1}) = \frac{1}{1 + s_1(i)(1 + s_2)z^{-1} + s_2 z^{-2}}, \quad (40)$$

y $s_1(i)$ es el parámetro del filtro en la iteración i .

La estimación en forma cerrada se obtiene minimizando:

$$P_N(\hat{s}_1(i+1)) = \frac{1}{N-2} \sum_{n=2}^{N-1} e^2(n, \hat{s}_1(i+1)) \quad (41)$$

donde $e(n, \hat{s}_1(i+1)) = g(n) + 2\hat{s}_1(i+1)g(n-1) + g(n-2)$. Para minimizar (41), se debe resolver

$$\sum_{n=2}^{N-1} (g(n) + 2\hat{s}_1(i+1)g(n-1) + g(n-2)) g(n-1) = 0$$

Lo que resulta en el estimador del parámetro en forma cerrada:

$$\hat{s}_1(i+1) = \frac{-\sum_{n=2}^{N-1} g(n)g(n-1) - g(n-1)g(n-2)}{2\sum_{n=2}^{N-1} g^2(n-1)} \quad (42)$$

Si N es suficientemente grande

- $\sum_{n=2}^{N-1} g(n)g(n-1) \approx \sum_{n=2}^{N-1} g(n-1)g(n-2) \approx \sum_{n=1}^{N-2} g(n)g(n-1)$
- $\sum_{n=2}^{N-1} g^2(n-1) \approx \sum_{n=1}^{N-2} g^2(n)$

entonces (42) puede aproximarse por

$$\hat{s}_1(i+1) = \frac{-\sum_{n=1}^{N-2} g(n)g(n-1)}{\sum_{n=1}^{N-2} g^2(n)} \quad (43)$$

La fórmula de adaptación en forma cerrada obtenida en la Ec. (42) se la denomina estimación basada en lattice (LBE), mientras que la obtenida en la Ec. (43) estimación aproximada basada en lattice (ALBE).

Análisis de convergencia para estimación notch

Se muestra que para $N \rightarrow \infty$, el MSE de $\hat{s}_1(i+1) < \hat{s}_1(i)$. La demostración se basa en el ALBE.

Si $N \rightarrow \infty$, $\sum_{n=1}^{N-2} g(n)g(n-1) \approx r_g$, con $r_g = r_{gs} + r_{gw}$.

$$r_{gs} = \frac{A^2 |D_i(e^{j\omega_0})|^2}{2} \cos(\omega_0), \quad (44)$$

$$r_{gw} = -\hat{s}_1(i+1)\sigma_{gw}^2 \quad y \quad (45)$$

$$\sigma_{gw}^2 = \frac{\sigma}{(1-s_2^2)(1-\hat{s}_1^2(i))} \quad (46)$$

Para N grande, $\sum_{n=1}^{N-1} g^2(n) \approx \epsilon_g$, es decir que la energía $g(n)$. Luego

$$\epsilon_g = \frac{A^2 |D_i(e^{j\omega_0})|^2}{2} + \sigma_{gw}^2. \quad (47)$$

Reemplazando las Ecs.(44), (45) y (47) en (43), se obtiene:

$$\hat{s}_1(i+1) = f(\hat{s}_1(i)) = \frac{-\frac{A^2 |D_i(e^{j\omega_0})|^2}{2} \cos(\omega_0) + \hat{s}_1(i)\sigma_{gw}^2}{\frac{A^2 |D_i(e^{j\omega_0})|^2}{2} + \sigma_{gw}^2} \quad (48)$$

Para obtener el MSE de $\hat{s}_1(i+1)$ como una función de $\hat{s}_1(i)$, se considera una aproximación de primer orden de $f(\hat{s}_1(i))$ alrededor de $\hat{s}_1(i) = s_1^o = -\cos(\omega_0)$ (sintonización perfecta). Entonces

$$\hat{s}_1(i+1) = f(s_1^o) + \left. \frac{\partial f(\hat{s}_1(i))}{\partial \hat{s}_1(i)} \right|_{\hat{s}_1(i)=s_1^o} (\hat{s}_1(i) - s_1^o) + \dots \quad (49)$$

donde $f(s_1^o) = s_1^o$,

$$\left. \frac{\partial f(\hat{s}_1(i))}{\partial \hat{s}_1(i)} \right|_{\hat{s}_1(i)=s_1^o} = f'(s_1^o) = \frac{1}{(4SNR/(1-s_2^2) + 1)} \quad (50)$$

y $SNR = \frac{A^2/2}{\sigma^2}$. Luego, el MSE aproximado de $\hat{s}_1(i+1)$ dado $\hat{s}_1(i)$ es

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{s}_1(i+1)) &= \text{E} \left\{ (\hat{s}_1(i+1) - s_1^o)^2 \mid \hat{s}_1(i) \right\} \\ &\approx \text{E} \left\{ \left(f'(\hat{s}_1(i)) (\hat{s}_1(i) - s_1^o) \right)^2 \right\} \\ &= f'(s_1^o)^2 \text{MSE}(\hat{s}_1(i)) \end{aligned} \quad (51)$$

Si $f'(s_1^o)^2 < 1$ el algoritmo converge. Entonces:

$$f'(s_1^o)^2 < 1 \Rightarrow 1 < 4 \frac{SNR}{1-s_2^2} + 1 \Rightarrow 0 < SNR. \quad (52)$$

Como $f'(s_1^o)^2 < 1 \forall s_2$ y SNR, la convergencia del algoritmo está probada.

Como corolario, el MSE de $\hat{s}_1(i)$ puede encontrarse resolviendo recursivamente la Ec. (51). Luego

$$\text{MSE}(\hat{s}_1(i)) = f'(s_1^o)^{2i} \text{MSE}_0 \quad (53)$$

donde MSE_0 es la condición inicial definida como $\text{MSE}_0 = (\hat{s}_1(0) - s_1^o)^2$.