

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.

Diseño de distancia mínima.

- Espacio de señales.
- Modelado de señales
- Diseño en base a distancia mínima.
- Aplicación a diferentes modulaciones
 - Pulsos aislados
 - Con ISI.
- Ancho de banda y dimensionalidad.

Espacio de Señales

- En lugar de un diseño heurístico del receptor, como anteriormente, diseño en base a un criterio definido sobre las señales transmitidas:
Distancia Mínima.
- Señales se pueden representar como vectores en un espacio finito, entonces medida de similaridad entre señales: distancia mínima entre vectores
- Con este criterio, elección de la señal (entre un conjunto predefinido) que está más próxima a la recibida.

Espacio de Señales

En base a la señal \mathbf{Y} recibida, formada por una de las L del conjunto

$$\{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_L\}$$

donde \mathbf{Y} y $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_L$ son vectores con producto interno

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_k^*$$

en caso de señales discretas, o

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

en el caso de señales continuas. Además,

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle < \infty$$

Modelado de Señales

- Como L es normalmente grande, se elige un espacio ortogonal (de dimensión $N \leq L$) para la representación de las señales.

- La base ortogonal será $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$, tal que

$$\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle = \delta_{i,j}$$

- Entonces, las señales se pueden escribir

$$S_l = \sum_{n=1}^N s_{n,l} \Phi_n \qquad s_{n,l} = \langle S_l, \Phi_n \rangle$$

Criterio de diseño de distancia mínima

- Se supone que la señal recibida es $\mathbf{Y} = \mathbf{S}_l + \mathbf{E}$

y se busca minimizar

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{S}_l\|^2 = \|\mathbf{Y}\|^2 + \|\mathbf{S}_l\|^2 - 2 \operatorname{Re}\{\langle \mathbf{Y}, \mathbf{S}_l \rangle\}$$

o, como $\|\mathbf{Y}\|^2$ es independiente de l ,

$$\max_l (\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{Y}, \mathbf{S}_l \rangle\} - 1/2E_l), \quad E_l = \|\mathbf{S}_l\|^2$$

Para disminuir la complejidad, usando una base ortogonal,

$$\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{Y}, \mathbf{S}_l \rangle\} = \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=1}^N s_{n,l}^* \langle \mathbf{Y}, \Phi_n \rangle\right\} = \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=1}^N c_n s_{n,l}^*\right\}$$

entonces

$$\max_l \left(\operatorname{Re}\left\{\sum_{n=1}^N c_n s_{n,l}^*\right\} - 1/2E_l \right) = \min_l \sum_{n=1}^N |c_n - s_{n,l}|^2$$

Distancia mínima de un conjunto de señales

- Una medida importante de la inmunidad frente a ruido de un conjunto de señales es

$$d_{min} = \min_{i \neq j} \|S_i - S_j\|$$

- Para ruido Gaussiano, es el parámetro mas importante para predecir la probabilidad de error con este tipo de diseño.

Aplicación a diferentes modulaciones: PAM

Sin ISI, $y = a_m + e, \{a_m, 1 \leq m \leq M\}$

Entonces, considerando y como un vector unidimensional,

$$\min_m \|\mathbf{Y} - \mathbf{S}_m\|^2 = \min_m |y - a_m|^2$$

o, en forma equivalente,

$$\max_m \left(2\operatorname{Re}\{ya_m^*\} - |a_m|^2 \right)$$

La distancia mínima será

$$d_{\min} = a_{\min}, \quad a_{\min} = \min_{i \neq j} |a_i - a_j|$$

Aplicación a diferentes modulaciones (PAM)

Ejemplo: Umbrales de decisión para QAM

$$\min_l |Q - a_l|^2 = \min_l \left((Re\{Q\} - Re\{a_l\})^2 + (Im\{Q\} - Im\{a_l\})^2 \right)$$

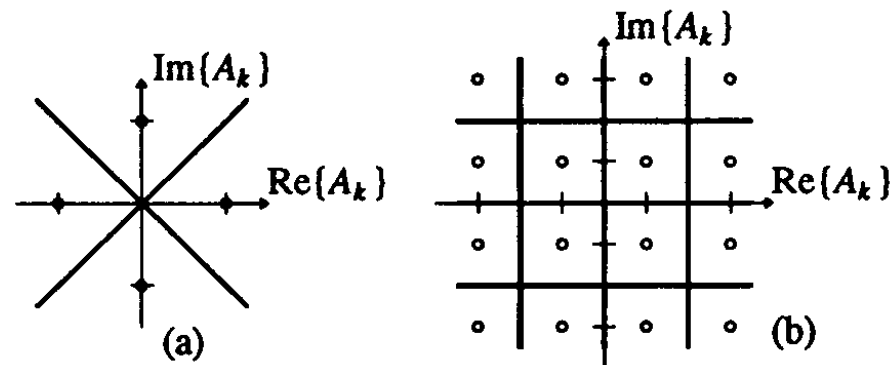


Figure 7-5. The minimum-distance decision regions for the constellations in Figure 6-24.

Aplicación a diferentes modulaciones (PAM)

Suponiendo ahora un formato de pulso específico, sin ISI (un pulso aislado)

$$y(t) = a_l h(t) + e(t)$$

Por ser una constelación unidimensional $\phi(t) = h(t)/\sigma_h$,

$$\max_l \left(2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y(t) a_l^* \sigma_h \phi^*(t) dt \right\} - \int_{-\infty}^{\infty} |a_l \sigma_h \phi(t)|^2 dt \right)$$

Definiendo $c = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \phi^*(t) dt$, se tiene

$$\min_l |c - \sigma_h a_l|^2 = \max_l \left(2 \operatorname{Re} \{ \sigma_h c a_l^* \} - \sigma_h^2 |a_l|^2 \right)$$

$$d_{\min} = \sigma_h a_{\min}$$

Aplicación a diferentes modulaciones (PAM)

Dos realizaciones equivalentes

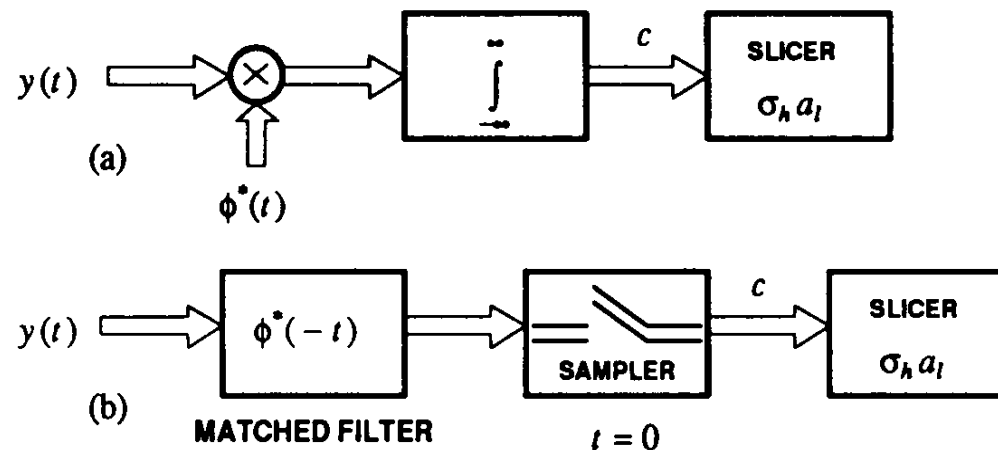


Figure 7-6. The minimum-distance receiver for an isolated pulse PAM. (a) The correlator realization, and (b) the matched filter realization. The minimum-distance receiver consists of a correlator, or equivalently matched filter and sampler, followed by a slicer.

Aplicación a diferentes modulaciones (PAM)

Desde la perspectiva de caracterización de ISI es conveniente tener en cuenta

$$\rho_h(k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h^*(t - kT)dt$$

Correspondiente a una versión muestreada de la TF de $|H(j\omega)|^2$,

$$S_h(e^{j\omega T}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_h(k)e^{-j\omega kT} = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} |H(j(\omega + m\frac{2\pi}{T}))|^2$$

El criterio de Nyquist aplicado a la salida del filtro acoplado será

$$\rho_h(k) = \rho_h(0)\delta_k, \quad S_h(e^{j\omega T}) = \rho_h(0) = \sigma_h^2$$

Aplicación a diferentes modulaciones (PAM)

Ejemplos:

- 1) Para $h(t) = \sigma_h \sqrt{2a} e^{-at} u(t)$, $u(t)$ escalón unitario, $a > 0$ y σ_h^2 es la energía del pulso, entonces

$$\rho_h(k) = \sigma_h^2 \alpha^{|k|}, \quad \alpha = e^{-aT}, \quad S_h(z) = \frac{\sigma_h^2 (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)} \quad \rightarrow \text{ISI !!}$$

- 1) $h_0(t)$ tal que ortogonal a sus translaciones en kT . Entonces, para

$$h(t) = h_0(t) + \alpha h_0(t - T),$$

$$\rho_h(k) = \{\dots, 0, \alpha\sigma_0^2, (1 + \alpha^2)\sigma_0^2, \alpha\sigma_0^2, 0, \dots\},$$

$$S_h(z) = \sigma_0^2 (1 + \alpha z^{-1})(1 + \alpha z) \quad \rightarrow \text{ISI !!}$$

Aplicación a diferentes modulaciones

Modulación de pulsos ortogonales:

Sin ISI (N pulsos ortogonales) $y(t) = a_l \phi_l(t) + e(t)$

donde se tiene un conjunto ortogonal $\{\phi_n(t), 1 \leq n \leq N\}$,

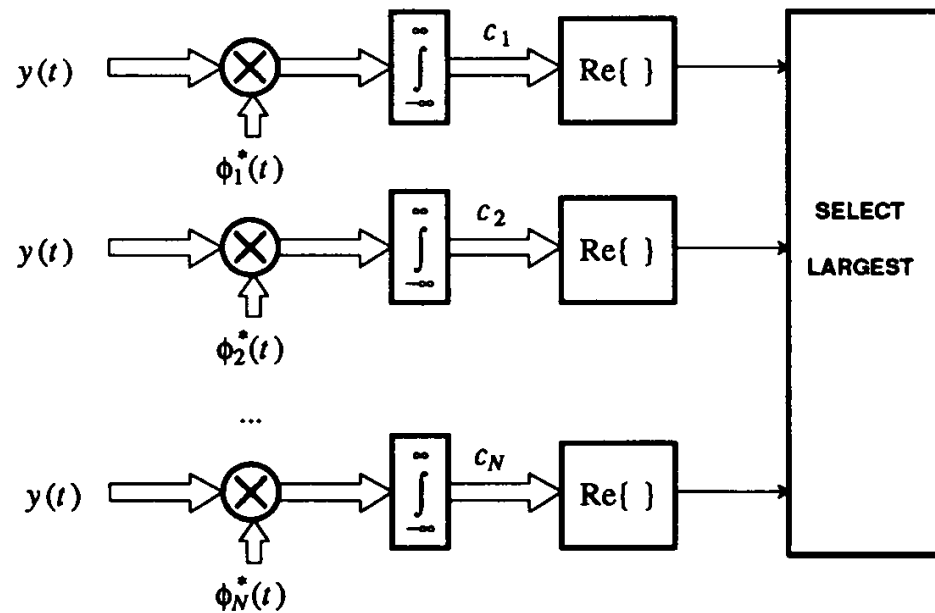
Definiendo $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \phi_n^*(t) dt$, se tiene

$$\min_l \left(\sum_{n=1, n \neq l}^N |c_n|^2 + |c_l - \sigma_h|^2 \right) = \min_l \left(\sum_{n=1}^N |c_n|^2 - 2\sigma_h \operatorname{Re}\{c_l\} + \sigma_h^2 \right)$$

$$d_{\min} = \sqrt{2}\sigma_h$$

Aplicación a diferentes modulaciones

Modulación de pulsos ortogonales



Aplicación a diferentes modulaciones

PAM combinada con modulación de pulsos ortogonales

En este caso: $y(t) = \sum_{n=1}^N a_{n,l} \sigma_h \phi_n(t) + e(t)$, $\{\phi_n(t), 1 \leq n \leq N\}$

L indica cual señal fue transmitida tal que $L = M^N$, M : tamaño de la constelación.

Con
$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \phi_n^*(t) dt$$

se minimiza

$$\min_l \sum_{n=1}^N |c_n - \sigma_h a_{n,l}|^2$$

$$d_{\min} = \sigma_h a_{\min}$$

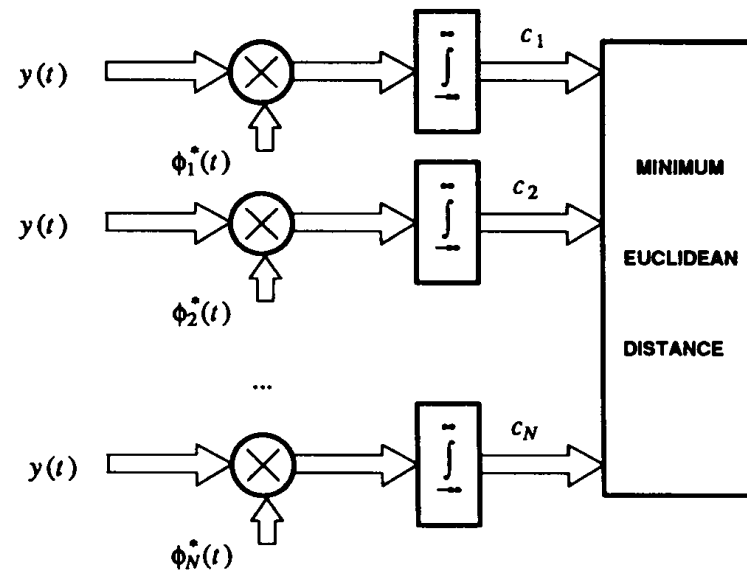


Figure 7-8. The minimum-distance receiver design for orthogonal multipulse combined with PAM.

Diseño de distancia mínima para PAM con ISI

En este caso consideramos $y(t) = \sum_{k=1}^K a_k h(t - kT) + e(t)$

donde $h(t)$ es el pulso recibido (no satisface Nyquist) con energía σ_h^2 y $e(t)$ es ruido.

Ahora consideramos secuencias de símbolos de longitud K , $\{a_k, 1 \leq k \leq K\}$ en lugar de símbolos aislados.

Si cada símbolo es de un alfabeto de tamaño M , el tamaño de las señales será $L = M^K$

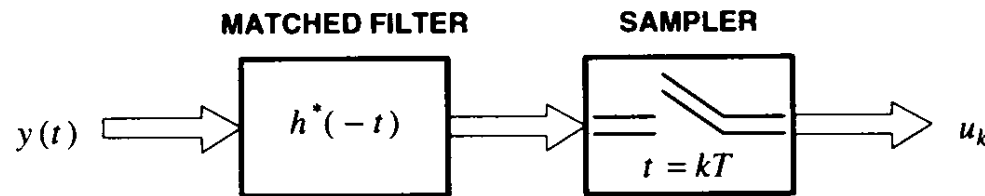
La base ortogonal no es útil en este caso.

Diseño del receptor

Utilizando el criterio de distancia mínima, se obtiene

$$\max_{a_k, 1 \leq k \leq K} \left(2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K u_k a_k^* \right\} - \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K a_k a_m^* \rho_h(m-k) \right)$$

donde $u_k = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) h^*(t - kT) dt$



$$y(t) \rightarrow u_k$$

Figure 7-9. The sampled-matched-filter receiver front end consists of a matched filter followed by a symbol-rate sampler.

Diseño del receptor

Algunas observaciones:

- Maximizar la anterior requiere repetir el cálculo para todas las posibles M^K secuencias, tal que se detectan K símbolos ***simultaneamente*** (no símbolo por símbolo como antes).
- Este criterio (distancia mínima) define un filtro que *no satisface Nyquist* para eliminar ISI.
- Como para Nyquist el ancho de banda de señal $B \geq 1/2T$, entonces en general no se verifica el Teorema de muestreo ($f_s \geq 2B$) y se tendrá *aliasing*.
- Problemas prácticos: alta complejidad.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente

Caso especial: pulsos ortogonales ($\rho_h(k) = \sigma_h^2 \delta_k^2$)

$$\max_{a_k, 1 \leq k \leq K} \left(2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K u_k a_k^* \right\} - \sigma_h^2 \sum_{k=1}^K |a_k|^2 \right) = \max_{a_k, 1 \leq k \leq K} \sum_{k=1}^K |u_k - \sigma_h^2 a_k|^2$$

tal que a la salida del filtro

acoplado muestreado

$$u_k = \sigma_h^2 a_k + e_k, \text{ sin ISI.}$$

Si los símbolos se toman

independientemente, equi-

valente a detección por

símbolo (Fig. b).

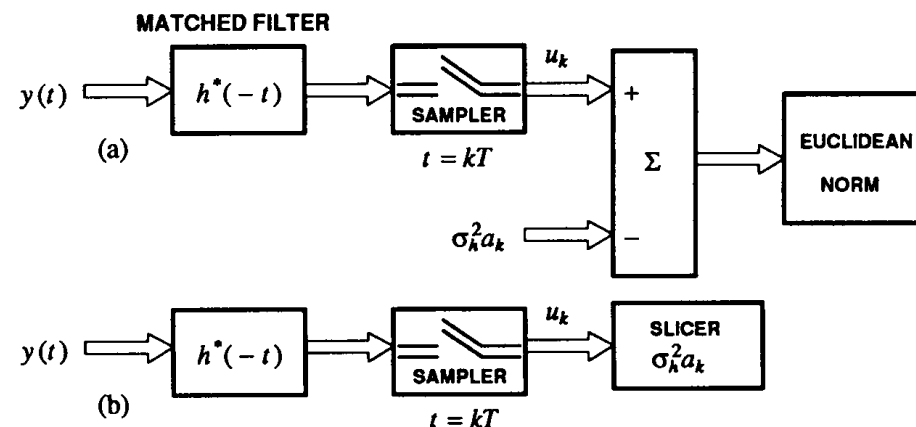


Figure 7-10. The minimum-distance receiver design for PAM when the PAM pulses at the output of the MF satisfy the Nyquist criterion. (a) The receiver that applies to any set of data-symbol sequences, and (b) the special case where data symbols are chosen independently.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente

Ejemplo: Para eliminar componente de cc en PAM bandabase uso de señalización Manchester: $a_k = 0$ para bit 0, $|a_k| = 1$ para bit 1, donde el signo de a_k se elige como el opuesto al del último a_k no cero.

Mientras la realización Fig.b viola esta regla, la implementación adecuada es la de Fig.a.

Caso de redundancia (número de secuencias 2^K no 3^K):
redundancia reduce complejidad del diseño.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente (cont)

Caso general:

Cálculo directo impráctico porque

- La decisión para una única secuencia tiene complejidad K^2 . Para el caso ortogonal complejidad lineal. Se puede extender al caso general!
- El número total de secuencias es M^K . Solución con Algoritmo de Viterbi (más adelante).

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente (cont)

Para obtener un diseño de complejidad lineal se utilizará

$$S_h(z) = A_h^2 G_h(z) G_h^*(1/z^*)$$

donde $G_h(z)$ es una función transferencia mónica de fase mínima, y $S_h(z)$ es no negativa real sobre el círculo unitario.

En el dominio tiempo,

$$\rho_h(k) = A_h^2 (g_{h,k} * g_{h,-k}^*)$$

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente (cont)

Para u_k la salida del filtro acoplado muestreado, definimos el ecualizador **precursor**

$$u_m = A_h^2 w_m * g_{h,-m}^* = A_h^2 \sum_{k=m}^{\infty} w_k g_{h,k-m}^*$$

tal que el criterio ahora es $\max_{a_k, 1 \leq k \leq K} \sum_{m=1}^{\infty} |w_m - \sum_{k=1}^K a_k g_{h,m-k}|^2$.

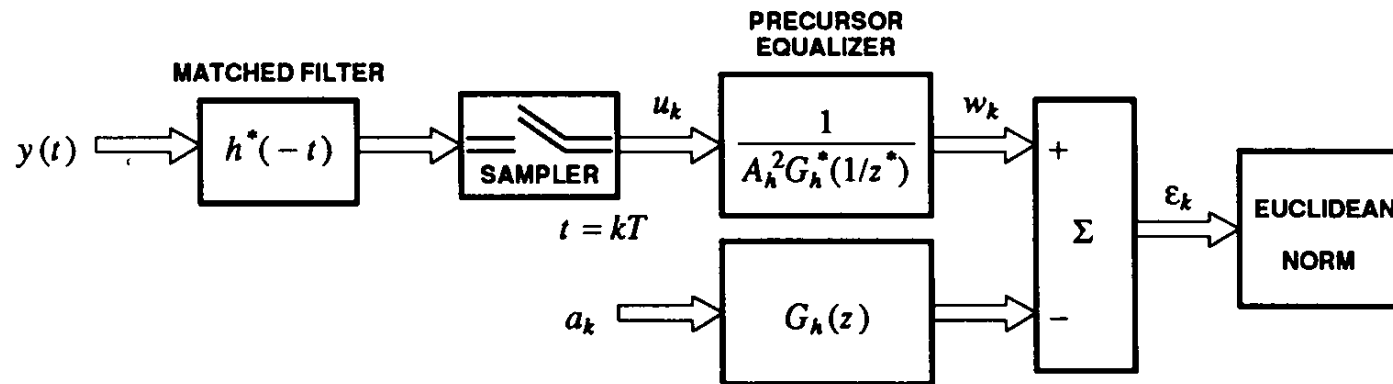


Figure 7-11. A minimum-distance receiver for PAM with ISI. This structure is a generalization of Figure 7-10, in that the continuous-time minimum distance criterion is transformed into a discrete-time minimum distance criterion. Unlike Figure 7-10, it applies even in the presence of ISI.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente (cont)

Observaciones:

- Este diseño es posible siempre que exista la factorización del canal.
- Es una generalización del caso ortogonal y, si $G_h(z)$ es FIR, el cálculo de la métrica de cada secuencia tiene complejidad proporcional a K .
- Este criterio es una versión discreta equivalente del diseño continuo original.
- El ecualizador de la rama superior se denomina ***precursor*** porque elimina una parte de la ISI (la parte anticausal).
- En presencia de ISI ($G_h(z) \neq 1$) no es equivalente al diseño de detección símbolo por símbolo.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente (cont)

Como $G_h(z)$ es de fase mínima, $G_h^*(1/z^*)$ y $1/G_h^*(1/z^*)$ también. Para ser estable este filtro tiene que ser anticausal (impráctico). Pero si es FIR (o aprox.) puede implementarse con un filtro causal y un retardo.

Ejemplo:
$$S_h(z) = \frac{A_h^2}{(1 - cz^{-1})(1 - c^*z)}, \quad |c| < 1$$

Precursor anticausal
FIR.

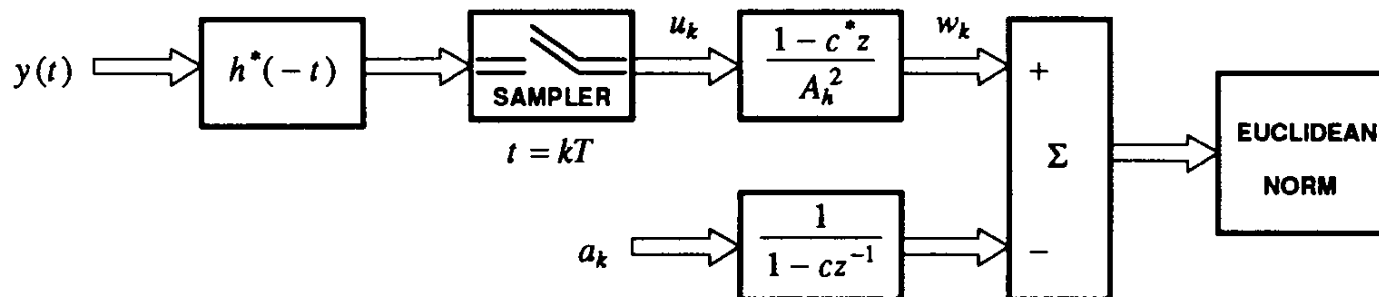


Figure 7-12. The minimum-distance receiver for first-order all-pole folded spectrum.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente (cont)

Ejemplo: $S_h(z) = A_h^2(1 - cz^{-1})(1 - c^*z), \quad |c| < 1$

Precursor anticausal IIR (solo aproximable mediante un filtro anticausal)

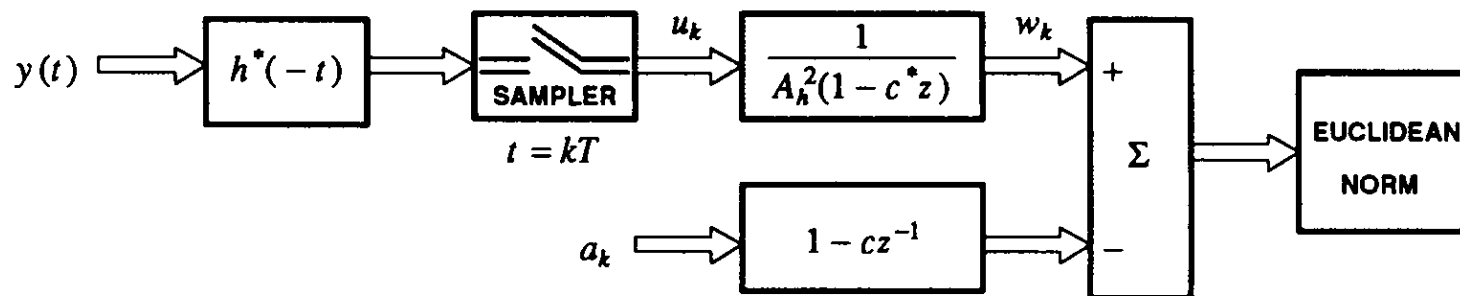


Figure 7-13. The minimum-distance receiver for a first-order all-zero folded spectrum.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente (cont)

Equivalencia entre criterios: la salida del filtro acoplado es

$$u_k = \sum_{m=1}^K a_m \rho_h(k-m) + e_k = a_k * \rho_h(k) + e_k$$

Func. Transfer. $S_h(z)$

Con esta entrada al filtro precursor, la función

transferencia para los símbolos queda $\frac{S_h(z)}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)} = G_h(z)$, tal que la salida es

$$w_k = \sum_{m=1}^K a_m g_{h,k-m} + e'_k$$

Un filtrado causal!! (se eliminó la parte anticausal)

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente (cont)

Solución no única del criterio discreto: Como $S_h(z)$ puede no ser de fase mínima, si intercalamos un pasatodo $H_{allpass}(z)$

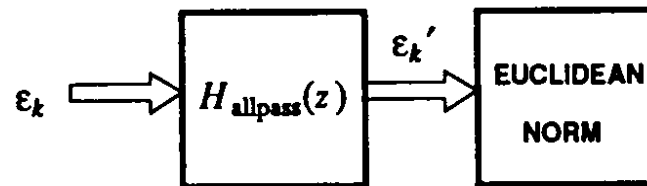


Figure 7-14. Introducing a rational allpass filter $H_{allpass}(z)$ before the Euclidean norm in Figure 7-11.

Por T. Parseval: $\sum_{m=1}^{\infty} |\varepsilon_m|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\varepsilon'_m|^2$, por lo que desplazando el pasatodo hacia atrás en las dos ramas la secuencia detectada será la misma. Equivalente, sin embargo ISI en general mayor! PORQUE!?.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente (cont)

Distancia mínima: Dos secuencias

$$\{\tilde{a}_k, 1 \leq k \leq K\} \quad \{\hat{a}_k, 1 \leq k \leq K\}$$
$$\varepsilon_k = \tilde{a}_k - \hat{a}_k$$

Entonces

$$d^2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \varepsilon_i \varepsilon_j^* \rho_h(j-i)$$

o, en forma discreta

$$d_{\min}^2 = \min_{\varepsilon_k, 1 \leq k \leq K} A_h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^K \varepsilon_i g_{h,k-i} \right|^2$$

Ancho de banda y dimensionalidad

Una propiedad importante de diseño de señales es la eficiencia espectral. En relación al criterio de Nyquist generalizado, se establece $B \geq N/2T$ para eliminar ISI en N pulsos ortogonales.

Se trabaja en general con un espacio de L señales de dimensión finita N .

Cual es la relación entre el ancho de banda de esta señales y la dimensión ??

Ancho de banda y dimensionalidad (cont.)

Teorema de Landau-Pollak: Existe un conjunto de $2Bt_0 + 1$ señales ortonormales $\phi_i(t)$, tal que para cualquier $f(t)$ con energía σ_f^2 limitada a B Hz, para cualquier constante $0 < \varepsilon < 1$

Y para cualquier t_0 suficientemente grande tal que

$$\int_0^{t_0} |f(t)|^2 dt > \sigma_f^2 (1 - \varepsilon)$$

existe un conjunto de $2Bt_0 + 1$ coeficientes f_i , tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \sum_{i=0}^{2Bt_0} f_i \phi_i(t)|^2 dt < 12\sigma_f^2 \varepsilon$$

Entonces, dimensión del espacio: $2Bt_0 + 1!!$ ■

Ancho de banda y dimensionalidad (cont).

Relación con el criterio de Nyquist generalizado:

Consideremos una secuencia de K símbolos transmitidos, y

$h_n(t)$, $1 \leq n \leq N$ es un conjunto ortogonal de pulsos de ancho de banda B Hz.

Una señal PAM combinada con los pulsos ortogonales será

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=1}^N A_{k,n} h_n(t - kT)$$

y estará en un espacio NK -dimensional.

Puede mostrarse que está limitada en tiempo a $(0,KT)$. Entonces por el teorema puede aproximarse por $(2 B K T + 1)$ funciones ortogonales.

$$2BKT + 1 \geq NK, \quad B \geq \frac{NK-1}{2KT}$$

Si $K \rightarrow \infty$ se verifica

Nyquist generalizado!

Ancho de banda y dimensionalidad (cont)

El ***producto tiempo-ancho de banda*** $2Bt_0$ juega un papel fundamental en señales aproximadamente limitadas en tiempo y frecuencia: a menor $2Bt_0$, mas artificial es la aproximación.

El teorema considera señales limitadas en frecuencia y aproximadamente limitadas en tiempo. El dual también es posible.

Ancho de banda y dimensionalidad (cont)

Ejemplo:

En espectro disperso $h(t)$ se modula en amplitud.

Para evitar ISI el ancho de banda debe ser mayor que $1/2T$. Pero en este caso se usa $B \gg$, ***tal que $2BT$ es muy grande.***

Entonces, $h(t)$ muy precisamente limitada en tiempo, ISI normalmente no es un problema.

Ancho de banda y dimensionalidad (cont)

Ejemplo:

En modulación de pulsos ortogonales (ej. FSK).

Para satisfacer Nyquist $2BT > N$.

Si N es grande entonces los pulsos van a estar confinados a T .

Aunque no es una premisa de esta modulación es una ventaja.

Ancho de banda y dimensionalidad (cont)

Ejemplo:

En modulación multiportadora, cuando la dimensionalidad del conjunto de señales aumenta, B se mantiene constante pero aumenta T .

La clave es la eficiencia espectral aproximadamente constante. Por Nyquist $N = 2BT$, tal que aumentando T , aumenta N .

Entonces, también a mayor N , mas limitado a T queda el símbolo (con el prefijo cíclico la ISI se elimina totalmente).